

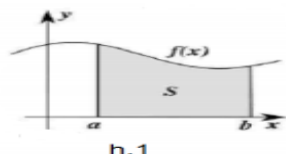
BÀI 3: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

A - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG:

I – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

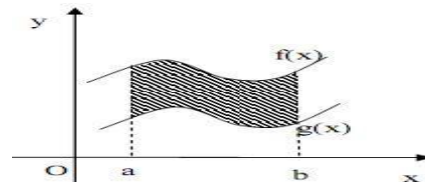
$$+ \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (trục } Ox) \\ x = a, x = b \text{ (} a < b \text{)} \end{cases}$$



$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

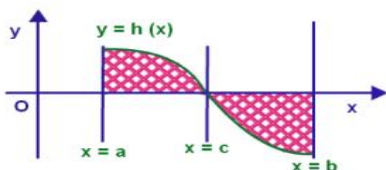
2) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$+ \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a, x = b \text{ (} a < b \text{)} \end{cases}$$



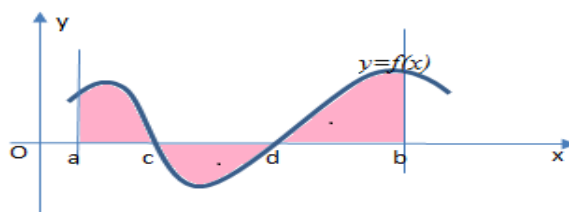
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

3) Diện tích hình phẳng (như hình vẽ)



$$S = \int_a^c |h(x)| dx + \int_c^b |h(x)| dx \\ = \int_a^c h(x) dx - \int_c^b h(x) dx$$

4) Diện tích hình phẳng (như hình vẽ)



$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

II – CÁCH GIẢI VÀ BÀI TẬP MẪU

1. CÁCH GIẢI:

+ Giải phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = 0$ (hoặc $f(x) = g(x)$)

+ Áp dụng công thức: $S = \int_a^b |f(x)| dx$ (hoặc $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$)

+ Chèn nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$ của phương trình hoành độ giao điểm vào để tách tích phân (nếu có). (**hoặc xét dấu rồi chia khoảng tính tích phân**)

+ Đưa dấu giá trị tuyệt đối từ trong dấu tích phân ra ngoài dấu tích phân

+ Tìm nguyên hàm và tính kết quả.

* **Lưu ý:** Chỉ có thể đưa dấu trị tuyệt đối ra ngoài tích phân nếu hàm số dưới dấu tích phân không đổi dấu trên $[a; b]$.

2. VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$.

Giải:

+ **CÁCH 1:** (chèn nghiệm đưa dấu giá trị tuyệt đối ra ngoài dấu tích phân)

- Phương trình: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, nghiệm $x = 1 \in [0; 2]$

- Gọi S là diện tích cần tính, áp dụng công thức $S = \int_a^b |f(x)| dx$:

- Vậy $S = \int_0^2 |x^2 - 1| dx = \left| \int_0^1 (x^2 - 1) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 - 1) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 \right| = 2 \text{ (đvdt)}$

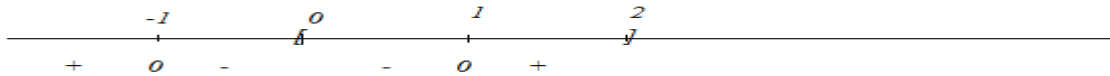
+ **Chú ý:** Bấm máy bấm bước thứ 2 trong dấu giá trị tuyệt đối được kết quả lấy GTTĐ để không âm. Vì bấm bước 1 có lúc bấm máy ra kết quả sai (máy tính casio)

+ **CÁCH 2: (Xét dấu để bỏ dấu giá trị tuyệt đối)**

- Phương trình: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, nghiệm $x = 1 \in [0; 2]$

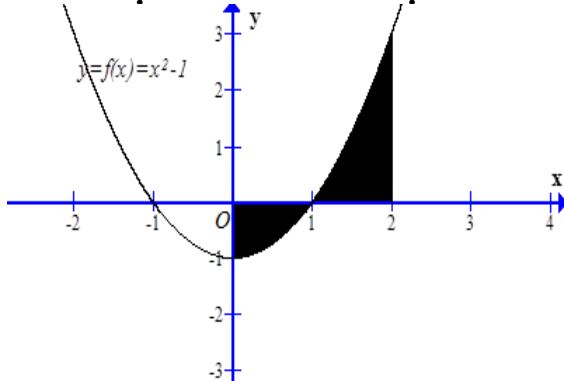
- Gọi S là diện tích cần tính, áp dụng công thức $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Xét dấu (làm nháp)



$$\text{Vậy } S = \int_0^2 |x^2 - 1| dx = -\int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = 2 \text{ (đvdt)}$$

THẺ HIỆN BẢNG ĐỒ THỊ:



Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2 - x^2$ và $y = x$.

Giải: **(Cách 1)**

- Cận a, b là nghiệm của phương trình: $2 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 1$

- Gọi S là diện tích cần tính, áp dụng công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

- Vậy $S = \int_{-2}^1 |x^2 + x - 2| dx = \left| \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 \right| = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}$

Ví dụ 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và parabol: $y = x^2 - 2x - 3$

Giải: **(Cách 1)**

- Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3$

- Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx = \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) \Big|_{-1}^3 \right| = \frac{32}{3} (\text{đvdt})$$

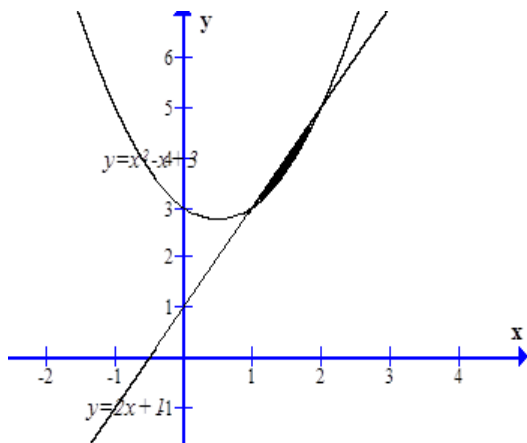
Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 - x + 3$ và đường thẳng $y = 2x + 1$

Giải: (Cách 1)

- Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$
- Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_1^2 \right| = \frac{1}{6} (\text{đvdt})$$

Cách 2: (Nếu cho đồ thị thì dùng hàm số nằm phía trên – (hàm số nằm phía dưới) để bỏ dấu GTĐ)



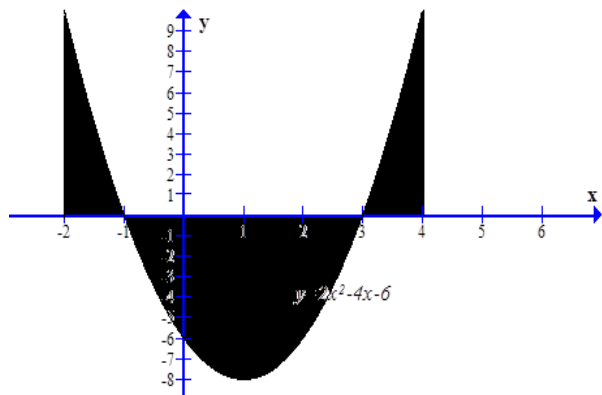
$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 |x^2 - x + 3 - (2x + 1)| dx = \int_1^2 [2x + 1 - (x^2 - x + 3)] dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, parabol : $y = 2x^2 - 4x - 6$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 4$.

Giải: (Cách 1)

- Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3$
- Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{-2}^4 |2x^2 - 4x - 6| dx = \left| \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6) dx \right| + \left| \int_{-1}^3 (2x^2 - 4x - 6) dx \right| + \left| \int_3^4 (2x^2 - 4x - 6) dx \right| = \dots = \frac{80}{3}$$



Nếu cho hình vẽ như bên:

$$S = \int_{-2}^4 |2x^2 - 4x - 6| dx$$

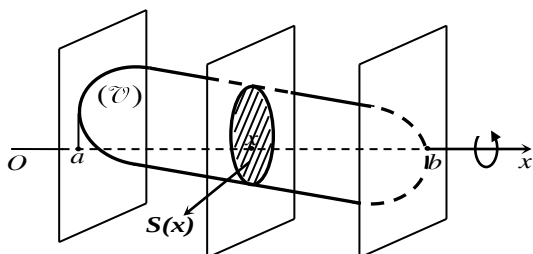
$$= \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6) dx - \int_{-1}^3 (2x^2 - 4x - 6) dx + \int_3^4 (2x^2 - 4x - 6) dx$$

$$= \dots = \frac{80}{3}$$

B. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Thể tích của vật thể giới hạn bởi 2 mp $(P), (Q) \perp Ox$ tại $x = a, x = b$ ($a < b$)

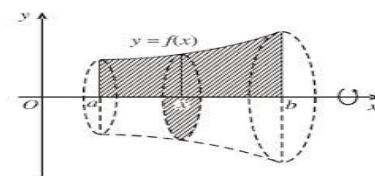


$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Trong đó: $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng vuông góc Ox cắt vật thể tại điểm có hoành độ x

2) Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi:

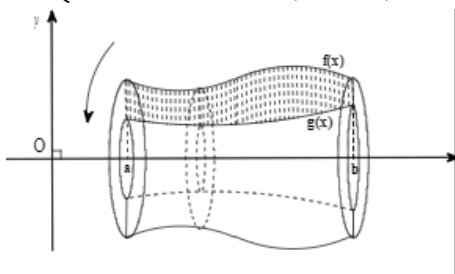
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (trục } Ox) \\ x = a, x = b \text{ (} a < b \text{)} \end{cases} \quad \text{quay quanh } Ox$$



$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

3) Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a, x = b \text{ (} a < b \text{)} \end{cases} \quad \text{quay quanh } Ox$$



$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

4. Bài toán thực tiễn:

Tìm Gia tốc, vận tốc, quãng đường:

$$+ a(t) = v'(t)$$

$$+ v(t) = s'(t)$$

$$+ v(t) = \int a(t) dt$$

$$+ s(t) = \int v(t) dt$$

Tìm vận tốc lớn nhất: mode 7

II. CÁCH GIẢI VÀ BÀI TẬP MẪU:

+ CÁCH GIẢI:

- Giải phương trình hoành độ giao điểm:
- Áp dụng công thức thể tích khối tròn xoay: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ (hoặc $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$)
- Tìm nguyên hàm, tính ra kết quả.

+ CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{1}{x}; y = 0; x = 1; x = 2, \text{ quay quanh trục Ox}$$

GIẢI: Áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

$$V = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} \text{ (đvtt)}$$

Ví dụ 2.

a) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox.

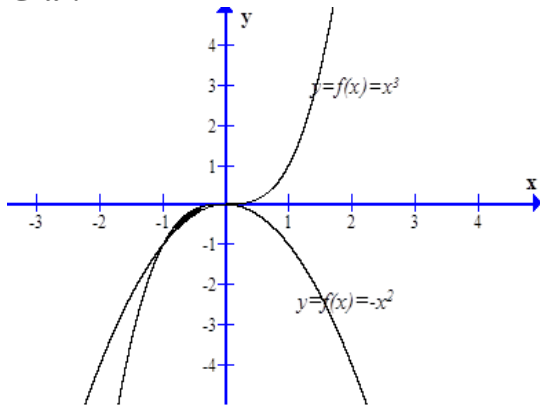
Giải:

- Phương trình $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $x = 2$
- Gọi V là thể tích cần tính. Áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15} \text{ (đvtt)}$$

b) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2$ và $y = x^3$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox.

Giải:



- Phương trình $-x^2 = x^3 \Leftrightarrow x = 0$ và $x = -1$
- Gọi V_1 là thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2$, $x = 0$, $x = -1$ và trục Ox quay quanh Ox:

$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 (-x^2)^2 dx = \frac{\pi}{5} \text{ (đvtt)}$$

• Gọi V_2 là thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$, $x = 0$, $x = -1$ và trục Ox quay quanh Ox :

$$V_2 = \pi \int_{-1}^0 (x^3)^2 dx = \frac{\pi}{7} \text{ (đvtt)}$$

Vậy thể tích V cần tính là: $V = |V_1 - V_2| = \frac{2\pi}{35} \text{ (đvtt)}$.

C - BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

- 1) $y = -x^2 + 2x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$.
- 2) $y = x^3 - x^2 + 2$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$; $x = 2$.
- 3) $y = x \ln x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = e$.
- 4) $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành.
- 5) $y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $y = x - 1$
- 6) $y = -x^2$ và $y = -x - 2$.

Bài 2: Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục Ox :

- 1) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.
- 2) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.
- 3) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
- 4) $y = x^3 - 3x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
- 5) $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$. (**HD: Cách làm giống VD 2b**)